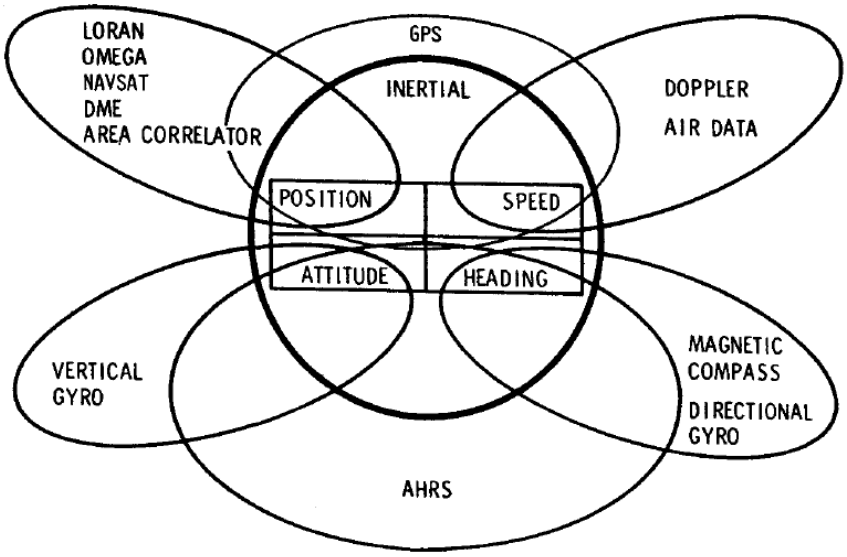
فصل سوم
سیستمهای ناوبری اینرسی

مقدمه

ناوبری اینرسی از انواع روشهای محاسبه مسیر می‌باشد، که بر اساس اندازه‌گیری شتاب حرکت جسم و انتگرال‌گیری از شتاب برای تعیین سرعت و انتگرال‌گیری مجدد برای تعیین موقعیت جسم عمل می‌کند. با توجه به اینکه در ساختار سیستم ناوبری اینرسی از ژیروسکوپ نیز استفاده می‌شود، در کنار تعیین متغیرهای حرکتی جسم می‌توان وضعیت (سمت‌گیری) جسم را نیز تعیین کرد. لذا یکی از مزیت‌های روش ناوبری اینرسی توانایی آن در تعیین توام موقعیت و وضعیت جسم می‌باشد. این توانایی در مقایسه با دیگر روشهای ناوبری در شکل ۱ نشان داده شده است. برتری دیگر روش ناوبری اینرسی، قابلیت تعیین متغیرهای حرکتی هم در دستگاه مختصات اینرسی و هم دستگاه جغرافیایی می‌باشد.

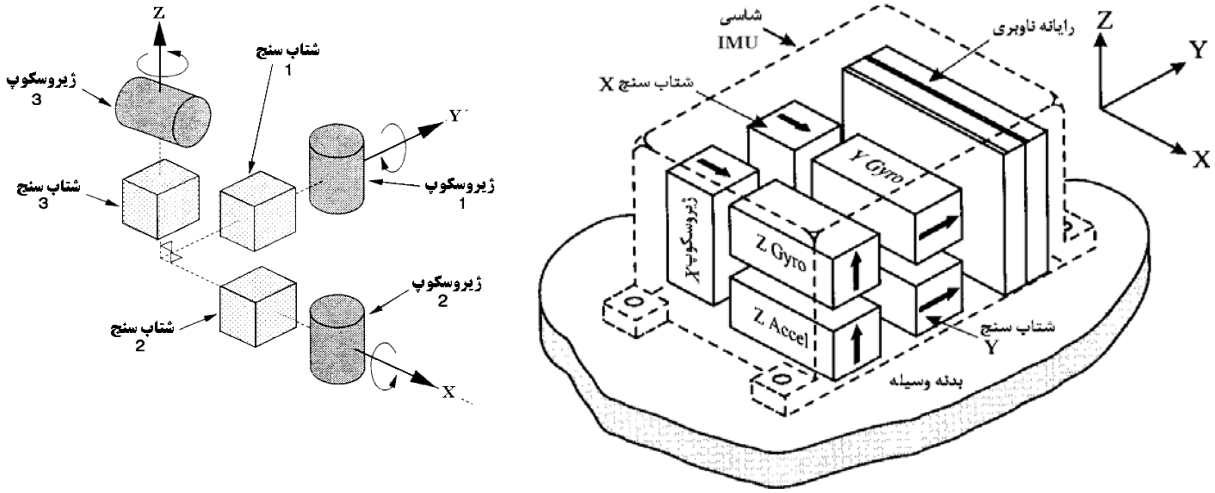


شکل ۱- مقایسه توانایی روش ناوبری اینرسی نسبت به روشهای دیگر

انواع سیستم های ناوبری اینرسی (Inertial Navigation Systems)

سیستمهای ناوبری اینرسی در یک تقسیم بندی کلاسیک به سه دسته تحلیلی، نیمه تحلیلی و هندسی تقسیم می‌شوند. هرچند از نظر تاریخچه پیدایش ترتیب از آخر به اول می‌باشد، برای درک بهتر ویژگی‌ها، معرفی را به همان ترتیب ذکر شده در فوق انجام می دهیم.

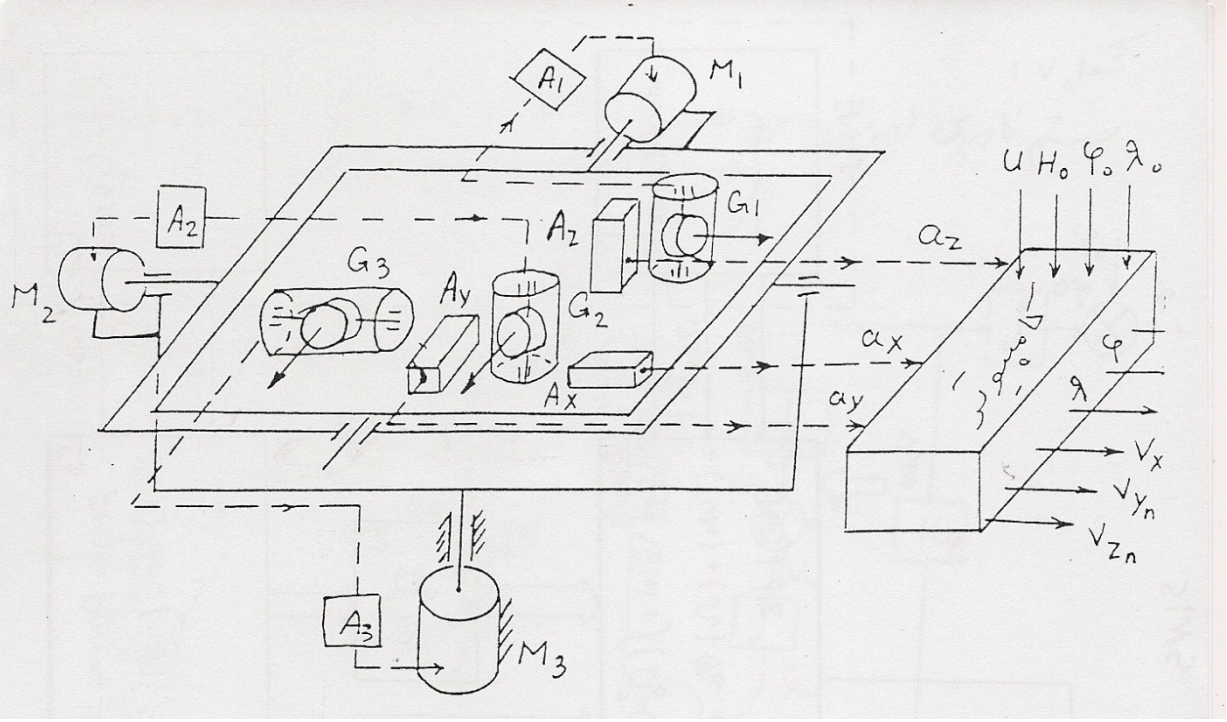
در سیستمهای ناوبری اینرسی تحلیلی، یک الگوریتم محاسباتی سنگین برای حل معادلات ناوبری، تبدیلات مختصات، انتگرالگیری‌های متوالی و پردازش خروجی‌ها وجود دارد. اطلاعات اولیه این الگوریتم، اندازه‌گیری‌های سنسورهای اینرسی هستند. مجموعه سنسورهای اینرسی ISA (Inertial Sensor Assembly) (شامل ژیروسکوپها و شتابسنج‌ها) به دو صورت قرارمی‌گیرند. در یک طرح ISA به صورت صلب بر روی بدنه وسیله پرنده نصب می‌شوند، که در این صورت به آن واحد اندازه‌گیری اینرسیIMU (Inertial Measurement Unit) گفته می‌شود. و سیستم ناوبری را در این صورت سیستم ناوبری اینرسی بدون صفحه پایدار(SINS) Strap down Inertial Navigation System گویند. (شکل ۲)



شکل ۲

در طرح دیگر ISA بر روی یک مکانیزم تعلیق (یا صفحه پایدار) نصب می‌شود، که حرکت زاویه ای ISA را از حرکات بدنه وسیله پرنده مستقل کرده و توسط یک سیستم کنترل اتوماتیک به کمک ژیروسکوپ‌ها در دستگاه مختصات اینرسی پایدار نگه می‌دارد. در این صورت خروجی شتابسنج‌ها مستقیما انتگرالگیری شده و سرعت و مختصات وسیله پرنده در دستگاه اینرسی بدست می‌آیند. برای بردن این کمیتها به دستگاه مختصات ناوبری، که می‌تواند دستگاه جغرافیای باشد، نیاز به تبدیل مختصات خواهد بود، که از طریق الگوریتم ناوبری انجام می‌گیرد. شکل ۲ به طور شماتیک ساختار و نحوه عملکرد این سیستم ناوبری را، که به نام INS تحلیلی (Analytical Inertial Navigation System) خوانده می‌شود، نشان می‌دهد.

در این طرح الگوریتم ناوبری در مقایسه با SINS بسیار ساده تر خواهد بود. اما از نظر سخت افزاری، بخش مکانیکی طرح دوم بسیار پیچیده تر و مفصل‌تر می‌باشد.



شکل ۳

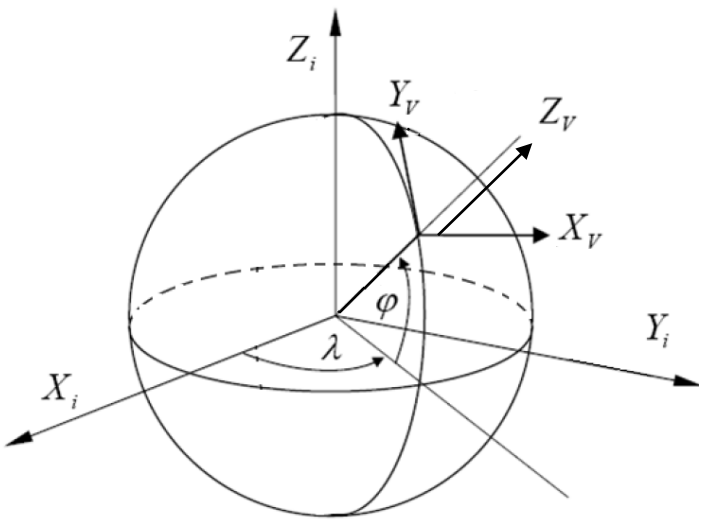
در گذشته، که کامپیوترهای دیجیتال پیشرفت لازم را برای پردازش بلادرنگ الگوریتم سنگین ناوبری نکرده بودند، پیاده سازی ناوبری اینرسی تحلیلی امکان پذیر نبود. لذا دو نوع دیگر، که محاسبات زیادی نیاز نداشتند، ایجاد

شدند، یعنی نوعی موسوم به نیمه تحلیلی (semi analytical Inertial Navigation System) و نوع دیگر موسوم به هندسی(Geometrical Inertial Navigation System).

در سیستم ناوبری اینرسی نیمه تحلیلی، صفحه پایدار به جای مختصات اینرسی، در دستگاه ناوبری(جغرافیایی) پایدار می‌گردد. در این صورت نیاز به تبدیل مختصات کلا برطرف شده و انتگرال‌گیری از شتابسج‌ها، مستقیما همان اطلاعات ناوبری مورد نیاز را در دستگاه جغرافیایی می‌دهد. به علاوه از محورهای سه گانه صفحه پایدار می‌توان وضعیت زاویه‌ای وسیله پرنده (همان زوایای اویلر) را نیز استخراج نمود. پایدار سازی صفحه پایدار در دستگاه مختصات جغرافیایی، از طریق دادن حرکات زاویه ای لازم به محورهای سه گانه صفحه، متناسب با مولفه های سرعت چرخش زمین و حرکات انتقالی پرنده در سمت شمال و شرق صورت می‌گیرد. شکل ۴ ساختار مکانیکی و الکتریکی این نوع سیستم ناوبری و نحوه پیاده سازی الگوریتم آن را نشان می‌دهد. همچنین در شکل ۵ اجزاء سیستم و سخت افزارهای مختلف آن و نیز نحوه صحیح قرارگیری صفحه نسبت به هواپیما معرفی شده اند.

مطابق شکل۴ پایدارسازی(هدایت) سکو در دستگاه مختصات جغرافیایی و الگوریتم استخراج متغیرهای ناوبری شامل مختصات و سرعتهای زاویه ای و زوایای اویلر جسم حامل، با منطق ذیل انجام می‌گیرد:

اولا وضعیت دو دستگاه مختصات جغرافیایی(ناوبری) و اینرسی مطابق شکل زیر خواهد بود. جهت مثبت محورها مطابق شکل ۴ در نظر گرفته شده است. محور Y_V افقی و رو به شمال، محور Z_V قائم و به طرف بالا مثبت است، محور X_V رو به شرق است.



ثانیا حرکتهای زاویه ای لازم برای سکو نسبت به فضای اینرسی تا اینکه همواره در مختصات جغرافیایی قرار داشته باشد، شامل چرخش زمین (U) و جابجایی جسم پرنده نسبت به زمین در جهت شمال و شرق می‌باشد. مولفه های این دو دسته حرکت بر روی محورهای سکوی پایدار به صورت زیر تعیین می‌شوند:

مولفه های سرعت زاویه ای زمین در امتداد محورهای دستگاه جغرافیایی(یا همان سکوی پایدار)، به صورت زیر خواهند بود:

$$U = 0i_V + U\cos(\varphi)\,j_V + U\sin(\varphi)k_V$$

تغییرات طول و عرض جغرافیایی مرکز جرم وسیله پرنده، که ناشی از حرکات آن در جهت شرق و شمال هستند، از روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\dot{\lambda} = \frac{V_E}{(R_E + H)\cos(\varphi)}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{-V_N}{R_E + H}$$

در روابط بالا H ارتفاع پرواز می‌باشد، که در اینجا نسبت به سطح زمین کروی با شعاع $R_E = 6378km$ سنجیده می‌شود. همچنین تغییرات ارتفاع همان سرعت قائم وسیله پرنده می‌باشد، که در امتداد محور Z_V است: $\dot{H} = V_H$

مولفه های $\dot{\lambda}$ در امتداد محورهای سکو مولفه های زیر را خواهند داشت:

$$\dot{\lambda}_Y = \frac{V_E}{(R_E + H)\cos(\varphi)} \times \cos(\varphi) = \frac{V_E}{(R_E + H)}$$
$$\dot{\lambda}_Z = \frac{V_E}{(R_E + H)\cos(\varphi)} \times \sin(\varphi) = \frac{V_E}{(R_E + H)}\tan(\varphi)$$

در نتیجه سرعتهای زاویه ای لازم حول محورهای سه گانه سکو به صورت زیر بدست می‌آیند. این حرکتها بایستی توسط سروموتورهای محورهای پایداری سکو به آن اعمال شود، تا سکو کاملا افقی و در جهت شمال قرار داشته باشد.

$$\omega_{Xv} = \frac{-V_N}{R_E + H}$$
$$\omega_{Yv} = \frac{V_E}{(R_E + H)} + U\cos(\varphi)$$
$$\omega_{Zv} = \frac{V_E}{(R_E + H)}\tan(\varphi) + U\sin(\varphi)$$

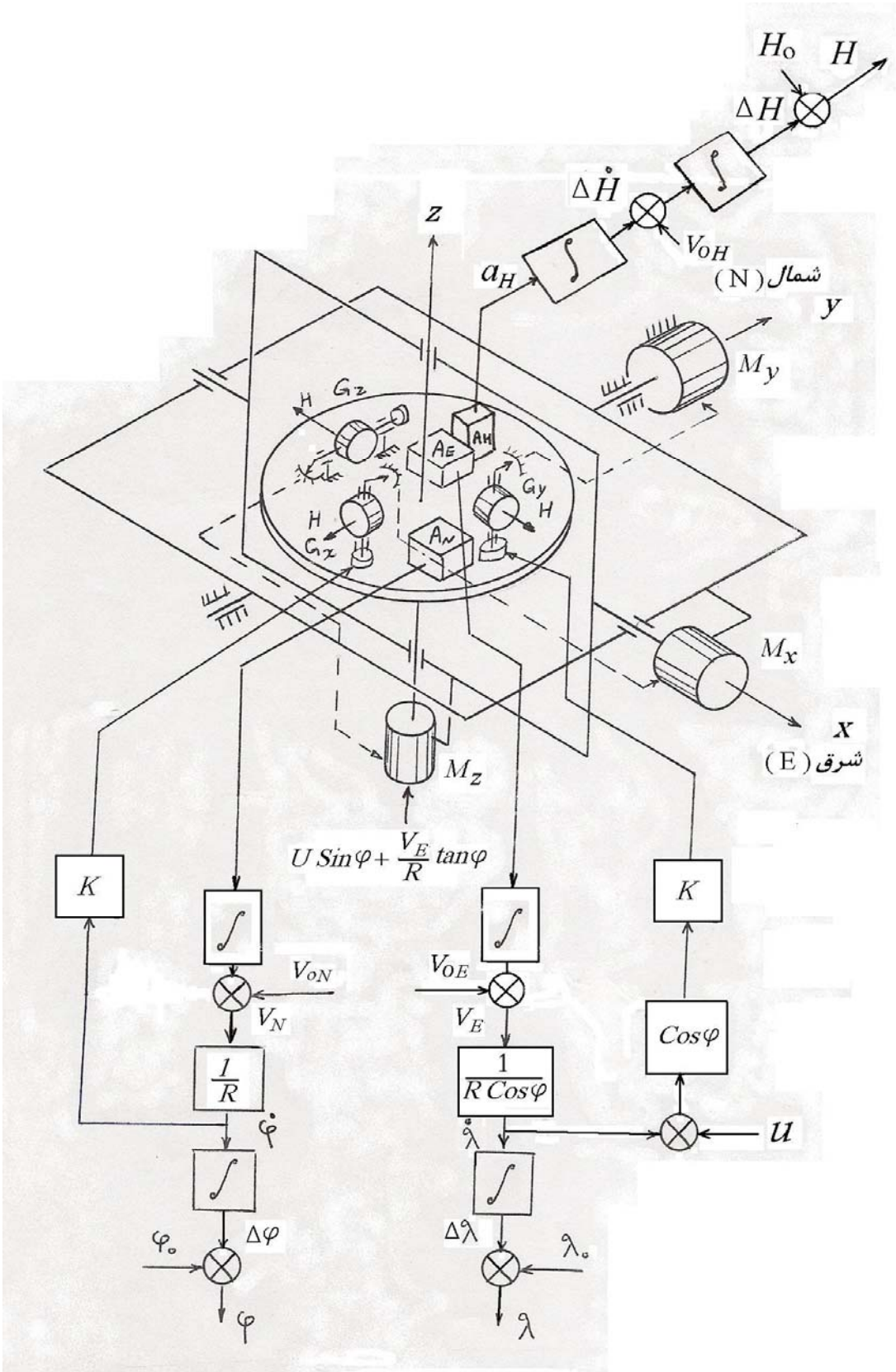
در این صورت شتابسنجهای سه گانه شتابهای حرکت جسم در امتداد محورهای دستگاه جغرافیایی را اندازه‌گیری می‌کنند، و انتگرال آنها همان سرعتهای V_H, V_N, V_E و به طریق زیر نیز تغییرات طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع بدست می‌آیند:

$$V_E = V_{0E} + \int a_E dt$$
$$\Delta\lambda = \int \frac{V_E}{(R_E + H)\cos(\varphi)} dt$$
$$V_N = V_{0N} + \int a_N dt$$
$$\Delta\varphi = \int \frac{V_N}{(R_E + H)} dt$$
$$V_H = V_{0H} + \int a_H dt$$
$$\Delta H = \int V_H dt$$

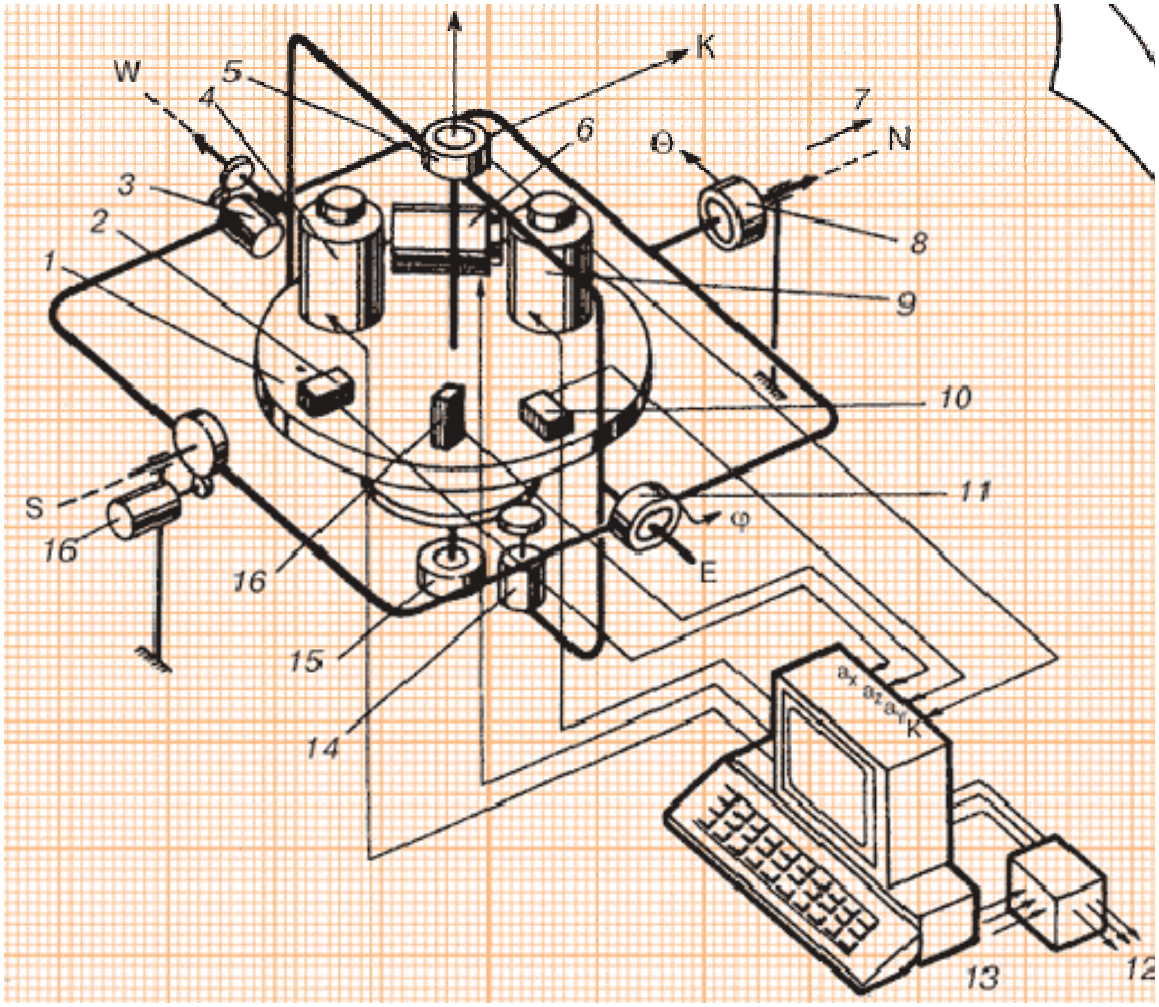
در روابط فوق V_{0H}, V_{0N}, V_{0E} مقادیر اولیه سرعتها هستند.

جهت استخراج زوایای اویلر جسم پرند، زاویه سنجهایی بر روی محورهای پایداری نصب می‌گردد. در نتیجه زاویه گردش سمتی (Yaw) از زاویه سنج محور قائم بر سکو، زاویه فراز ($Pitch$) از زاویه سنج محور قاب داخلی و زاویه غلت ($Roll$) از زاویه سنج محور قاب خارجی بدست می‌آیند.(شکل ۵)

یک عیب سیستم ناوبری اینرسی نیمه تحلیلی، که باعث بروز خطا در ناوبری خواهد شد، مزاحمت در کار ژیروسکوپ ها، از طریق چرخاندن صفحه پایدار و مجبور کردن ژیروسکوپها به عکس‌العمل می‌باشد. یک راه حل بهبود دقت اینست‌که با دخالت نکردن در کار ژیروسکوپ‌ها، اجازه دهیم، ژیروسکوپ‌ها صفحه پایدار را در فضای اینرسی پایدار کنند. در عوض سکوی دیگری از طریق یک مکانیزم تعلیق دیگر بر روی صفحه پایدار اول ایجاد کنیم که حرکات دستگاه جغرافیایی نسبت به فضای اینرسی را انجام دهد و شتابسنج‌ها را بر روی این سکو قرار دهیم. در این صورت انتگرال‌گیری از خروجی شتابسنج‌ها مستقیما اطلاعات سرعت و مختصات پرنده در دستگاه ناوبری خواهند بود. البته تعیین زوایای اویلر پرنده در این حالت به سادگی قبل نخواهد بود. سیستم ناوبری را در این صورت، سیستم ناوبری اینرسی هندسی گویند، که در شکل ۶ ساختار آن شامل صفحات پایدار، وضعیت نسبی آنها، و نحوه گردش سیگنال یه طور شماتیک نمایش داده شده است.

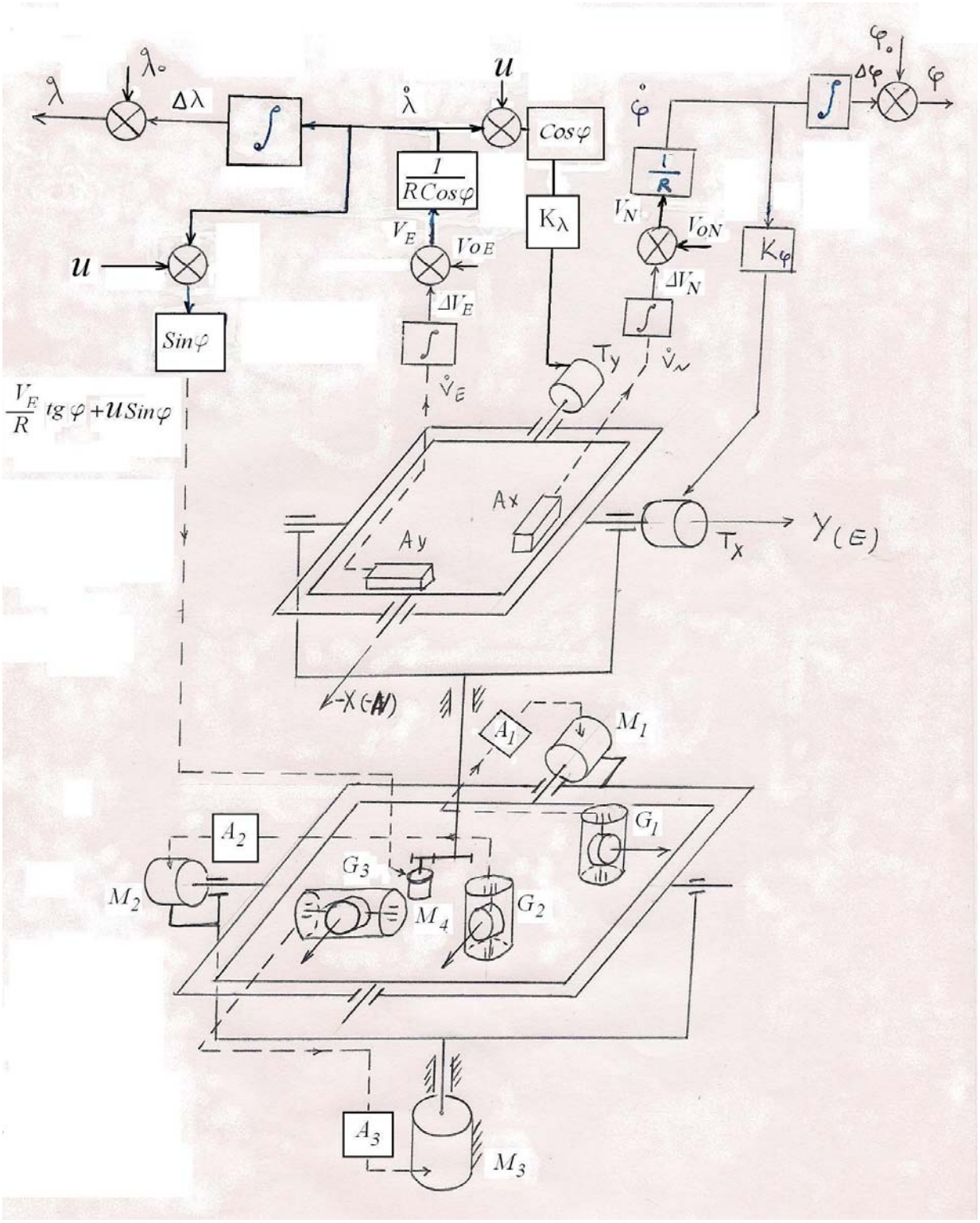

H_o
H
ΔH
$\Delta \dot{H}$
V_{oH}
a_H
z
شمال (N)
y
M_y
G_z
A_E
A_H
G_y
A_N
G_x
M_x
x
شرق (E)
M_z
$U\,Sin\varphi + \frac{V_E}{R}\tan\varphi$
K
V_{oN}
V_N
$\frac{1}{R}$
$\dot{\varphi}$
φ_o
$\Delta\varphi$
φ
V_{oE}
V_E
$\frac{1}{R\,Cos\varphi}$
$\dot{\lambda}$
$\Delta\lambda$
λ_o
λ
$Cos\varphi$
u

شکل ۴



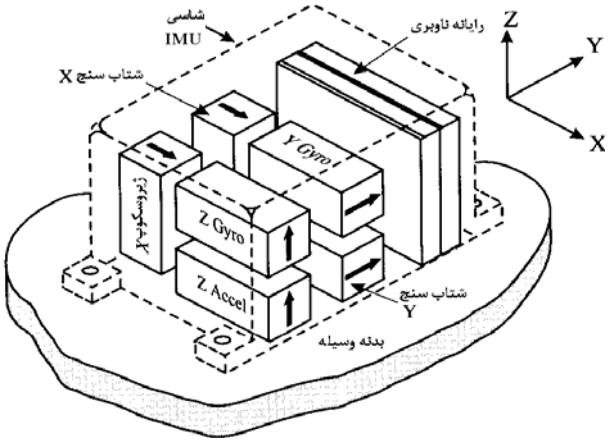
شکل ۵

۱- صفحه پایدار ۲، ۱۰ و ۱۷- شتابسنجها ۳- ترکر محور فراز ۴ ، ۶ و ۹ – ژیروسکوپها ۵، ۸ و ۱۱ – ترانسفورماتور چرخان ۷- جهت حرکت ۱۲- سیگنالهای خروجی ۱۳- سیگنالهای ورودی ۱۴- ترکر محور سمت ۱۵- مبدل مختصات ۱۶- ترکر محور غلت Θ- زاویه علت سکو φ- زاویه فراز سکو K- زاویه سمت سکو



شکل ۶

- الگوریتم محاسباتی سیستم ناوبری اینرسی تحلیلی بدون صفحه پایدار(SINS)



شکل ۷

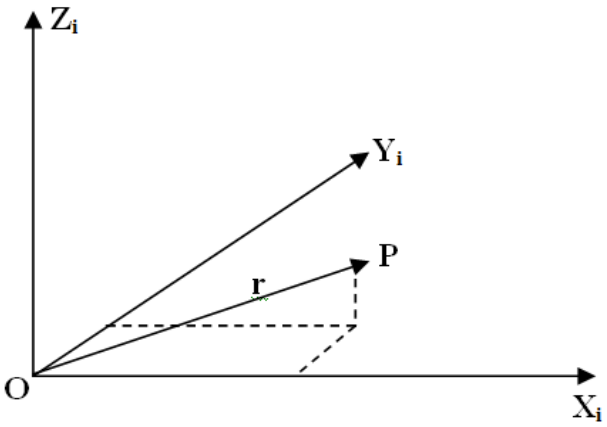
این الگوریتم محاسباتی، که در شکل ۸ آمده، دارای بلوک‌های زیر می‌باشد:

۱) ورودی سرعت های زاویه ای از ژیروسکوپ‌ها
۲) ورودی شتاب های ظاهری از شتابسنج‌ها
۳) برنامه حل معادله کواترنیون‌ها
۴) برآورد ماتریس تبدیل از دستگاه بدنی به دستگاه مرجع(جغرافیایی آزاد در آزیموت)
۵) محاسبه سرعت در دستگاه مرجع با انتگرالگیری از شتابهای ظاهری، شتاب کوریولیس و شتاب جاذبه
۶) محاسبه زوایای اویلر با استفاده از کواترنیون‌ها
۷) محاسبه سرعتهای زاویه‌ای دستگاه مرجع نسبت به زمین
۸) محاسبه سرعت‌های شرقی و شمالی جسم پرنده
۹) محاسبه سرعتهای زاویه‌ای دستگاه مرجع نسبت به دستگاه اینرسی
۱۰) محاسبه طول و عرض جغرافیایی و زاویه سمت (آزیموت) از ماتریس تبدیل دستگاه زمین به مرجع و ارتفاع از سرعت عمودی
۱۱) برآورد ماتریس تبدیل از دستگاه زمین به مرجع
۱۲) محاسبه سمت هواپیما از سمت مسیر و زاویه گردش هواپیما(یاو)

سیستمهای ناوبری اینرسی بدون سکو

۱-۱ ناوبری در دستگاه مختصات اینرسی

در این حالت، ناوبری نسبت به یک مجموعه از محورهای مختصات ثابت، بدون شتاب و بدون چرخش انجام می‌شود. برای این کار مولفه‌های نیروی مخصوص[1] (شتاب) اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها را با شتاب گرانش زمین که تخمین زده شده، جمع نموده تا مولفه شتاب را نسبت به دستگاه مختصات مرجع (اینرسی) بدست آوریم. با دو بار انتگرال‌گیری از این مقدار می‌توان بترتیب سرعت و موقعیت را در دستگاه اینرسی به دست آورد. همانطور که در شکل ۱-۱ نشان داده شده $\mathbf{r}$ بیانگر بردار موقعیت نقطهٔ P نسبت به نقطهٔ مرجع O در دستگاه مختصات اینرسی می‌باشد.



: بردار موقعیت نسبت به دستگاه مختصات اینرسی

شتاب نقطهٔ P نسبت به دستگاه مختصات اینرسی، که با زیر نویس i نشان داده شده است، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{a}_i = \frac{d^2 r}{dt^2}\Big|_i \qquad (۱-۱)$$

شتاب‌سنج‌ها، نیروی مخصوص (شتاب غیر گرانشی) وارد بر نقطهٔ P را تعیین می‌نمایند (f). از طرفی بدلیل اینکه شتاب‌سنج‌ها شتاب گرانش را اندازه‌گیری نمی‌نمایند باید شتاب گرانش را نیز به شتاب وارد بر وسیله اضافه

---

[1] Specific Force

نمود تا شتاب کل وارد بر ماهواره‌بر به صورت رابطه ((۲-۱)) حاصل شود.

$$\frac{d^2 r}{dt^2}\Big|_i = \mathbf{f}^i + \mathbf{g}^i \qquad (۱-۲)$$

این معادله به عنوان معادلهٔ ناوبری[1] خوانده می‌شود و با انتگرال‌گیری مناسب در طول زمان از این معادله، مولفه‌های ناوبری که همانا سرعت و موقعیت است به دست می‌آید. با یک بار انتگرال‌گیری از این معادله، سرعت نقطهٔ P نسبت به دستگاه مرجع اینرسی تعیین می‌شود.

$$\mathbf{v}_i = \frac{dr}{dt}\Big|_i \qquad (۱-۳)$$

و با دو بار انتگرال‌گیری از آن موقعیت نقطهٔ P در دستگاه مرجع اینرسی حاصل می‌شود.

شتاب‌سنج‌ها معمولاً اندازه نیروی مخصوص را در دستگاه مختصات بدنی اندازه‌گیری می‌کنند. اما در مسائل ناوبری لازم است مولفه‌های نیروی مخصوص را در یک دستگاه مختصات انتخابی (اینرسی، ناوبری و ...) بیان شود. در حالتی که دستگاه مختصات اینرسی انتخاب شود، با ضرب مقدار بردار شتاب در ماتریس کسینوس هادی (بدنی به اینرسی) مقدار نیروی مخصوص در دستگاه مختصات اینرسی تعیین می‌شود.

$$f^i = C_b^i f^b \qquad (۱-۴)$$

ماتریس کسینوس هادی از اندازه‌گیری نرخ زاویه‌ای توسط ژیروسکوپ‌ها تعیین می‌شود.

$$\dot{C}_b^i = C_b^i \Omega_{ib}^b \qquad (۱-۵)$$

که Ω_{ib}^b یک ماتریس پاد متقارن می‌باشد دلیل استفاده از این نوع ماتریس قانون ضرب بین ماتریسی می‌باشد که باید تعداد ستون‌های ماتریس اول برابر تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد.

$$\Omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱-۶)$$

ماتریس قبل متشکل از مولفه‌های بردار $\omega_{ib}^b = [p\ q\ r]^T$ می‌باشد که بیانگر نرخ چرخش بدنه نسبت به دستگاه

[1] Navigation Equation

مختصات اینرسی است و توسط ژیروسکوپ‌ها اندازه‌گیری می‌شود.

برای بیان سرعت اینرسی نسبت به سرعت در دستگاه مختصات زمین ثابت، از قانون کریولیس[1] استفاده می‌شود. (بدلیل چرخش دستگاه مختصات زمین ثابت زمین مرکز، نسبت به دستگاه ثابت اینرسی)

$$\frac{dr}{dt}\Big|_i = \frac{dr}{dt}\Big|_e + \omega_{ie} \times r \qquad (۱-۷)$$

با مشتق گیری از معادله بالا و با استفاده از رابطه $\frac{dr}{dt}\Big|_e = v_e$ داریم.

$$\left.\frac{d^2 r}{dt^2}\right|_i = \frac{dv_e}{dt}\Big|_i + \frac{d}{dt}\left[\omega_{ie} \times r\right]\Big|_i \qquad (۱-۸)$$

با جاگذاری رابطه (۱-۷) در رابطه (۱-۸) داریم (با فرض ثابت بودن نرخ چرخش زمین).

$$\frac{d^2 r}{dt^2}\Big|_i = \frac{dv_e}{dt}\Big|_i + \omega_{ie} \times v_e + \omega_{ie} \times \left[\omega_{ie} \times r\right] \qquad (۱-۹)$$

نهایتاً با کمک از رابطه (۱-۲) و جاگذاری در رابطه بالا به معادله سرعت در دستگاه مختصات زمین ثابت می‌رسیم (سرعت زمینی[2]).

$$\frac{dv_e}{dt} = f - \omega_{ie} \times v_e - \omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r] + g \qquad (۱-۱۰)$$

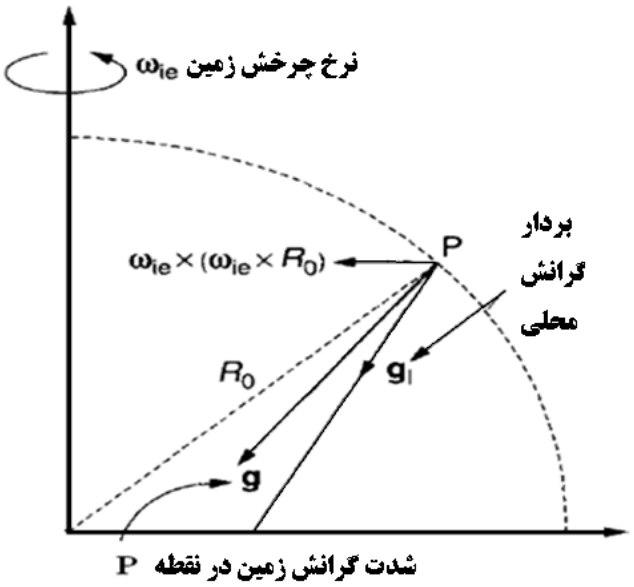
در معادله بالا f بیانگر شتاب غیر گرانشی (موتور-آیرودینامیک-کنترل و ...) است که سیستم ناوبری در معرض آن قرار دارد. از طرفی رابطه $\omega_{ie} \times v_e$ بیانگر شتاب ناشی از چرخش زمین است و به عنوان شتاب کریولیس شناخته می‌شود. عبارت $\omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r]$ در معادله فوق نمایان‌گر شتاب جانب مرکز[3] می‌باشد که ناشی از چرخش زمین است و قابل تفکیک از شتاب گرانش زمین نخواهد بود.

از مجموع شتاب‌های ناشی از نیروی گرانش زمین و نیروی جانب مرکز، بردار شتاب گرانش محلی حاصل می‌شود که بصورت شاغول[4] مانند (عمود محلی) در بالای زمین قرار می‌گیرد و با g_l نشان می‌دهند.

---

[1] Coriolis Equation
[2] Ground Speed
[3] Centrifugal Force
[4] Plumb bob

$$g_l = g - \omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r] \qquad \textbf{(۱-۱۱)}$$

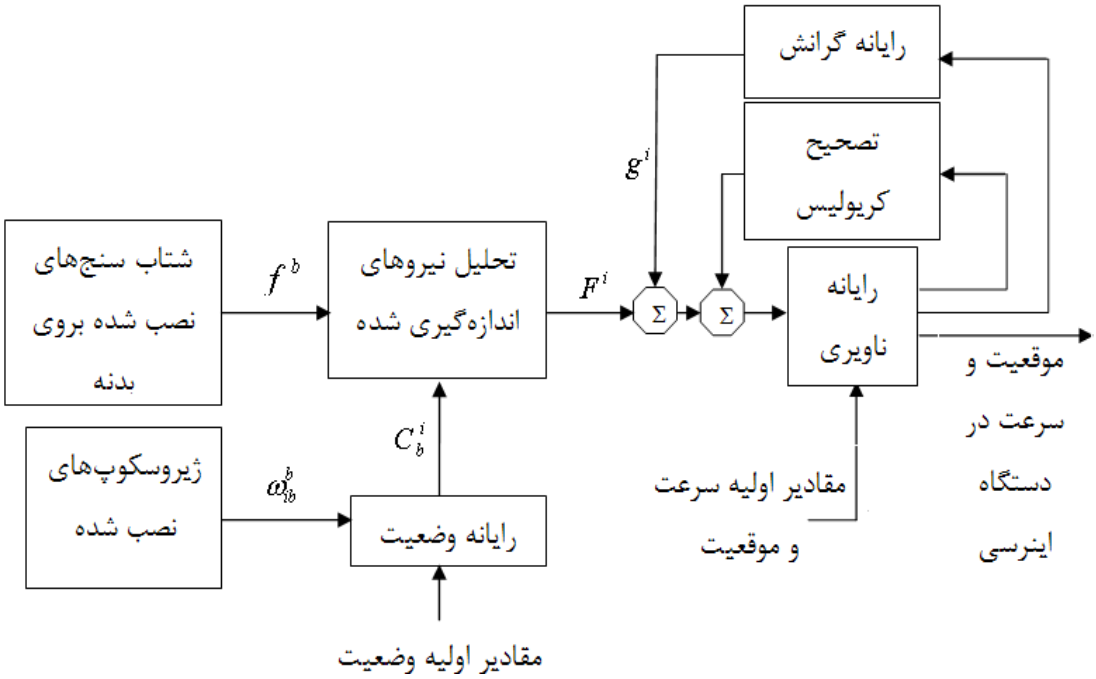


: تصویر مولفه های شدت گرانش زمین

بنابراین برای تعیین سرعت زمینی در دستگاه مختصات اینرسی باید از رابطه (۱۲-۱) نسبت به زمان انتگرال-گیری شود.

$$\dot{v}_e^i = C_b^i f^b - \omega_{ie}^i \times v_e^i + g_l^i \qquad \textbf{(۱-۱۲)}$$

در شکل زیر نحوه عملکرد سیستم ناوبری اینرسی بصورت شماتیک نشان داده شده است.



: نحوه عملکرد سیستم ناوبری اینرسی

۱-۲ مدل گرانش زمین

همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد نیروی گریز از مرکز در حالت کلی قابل تفکیک از شتاب گرانش زمین نخواهد بود و متغیر g_l مجموع نیروی گریز از مرکز و گرانش زمین است. منظور از گرانش زمین نیروی جاذبه‌ای که بین زمین و یک جرم واحد که در اطراف زمین قرار دارد می‌باشد. طبق قانون گرانش نیوتن، نیروی گرانش مابین زمین کروی و جرمی در اطراف زمین که در فضای اینرسی ثابت است (عدم چرخش با زمین) بدین صورت می‌باشد.

$$g_0 = -GM_e \frac{r}{|r|^3} \qquad (۱-۱۳)$$

که $G = 6.67259 \times 10^{-11}\ m^3/kg-s^2$ بعنوان ثابت گرانش و $M_e = 5.98 \times 10^{24} kg$ جرم زمین بصورت تقریبی است. در صورتی که جرم مورد نظر همراه با زمین بچرخد یک نیروی اضافی دیگری بنام نیروی جانب مرکز بر آن وارد می‌شود. این نیرو در قطبین برابر صفر و در استوا حداکثر مقدار را دارد.

مدل گرانشی مورد استفاده در این پروژه بر اساس فرمول سامی‌گیلینا[1] می‌باشد که میزان گرانش عمودی[2] برای سطح زمین بیضی در دستگاه مختصات جغرافیایی را نشان می‌دهد [33]:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \qquad (۱-۱۴)$$

که ϕ عرض جغرافیایی و e خروج از مرکزیت و مقدار ضریب k از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1 \qquad (۱-۱۵)$$

متغیرهای مورد استفاده در روابط بالا در جدول ۱-۱ نشان داده شده است.

جدول ۱-۱: متغیرهای زمین در مدل استاندارد WGS84

متغیر	واحد	WGS84
a: نیم قطر بزرگ زمین	m	۶۳۷۸۱۷۸
b: نیم قطر کوچک زمین	m	۶۳۵۶۷۵۲.۳۱۴۲
γ_e: گرانش عمودی در استوا	ms^{-2}	۹.۷۸۰۳۲۵۳۳۵۹
γ_p: گرانش عمودی در قطب	ms^{-2}	۹.۸۳۲۱۸۴۹۳۷۸
e^2: خروج از مرکزیت	-	۰.۰۰۶۶۹۴۳۷۹۹۹۰۱۴
m: ثابت بی بعد	-	۰.۰۰۳۴۴۹۷۸۶۵۰۶۸۴
f: ضریب زمین مسطح	-	۰.۰۰۳۳۵۲۸۱۰۶۶۴۸

[1] Somigliana Formula
[2] Normal Gravity

میزان گرانش زمین برای نقطه‌ای در بالای سطح زمین بیضی از رابطه (۱۶-۱) که ارتباط مستقیم میزان گرانش و ارتفاع را در دستگاه مختصات ناوبری محلی (NED) نشان می‌دهد حاصل می‌شود.

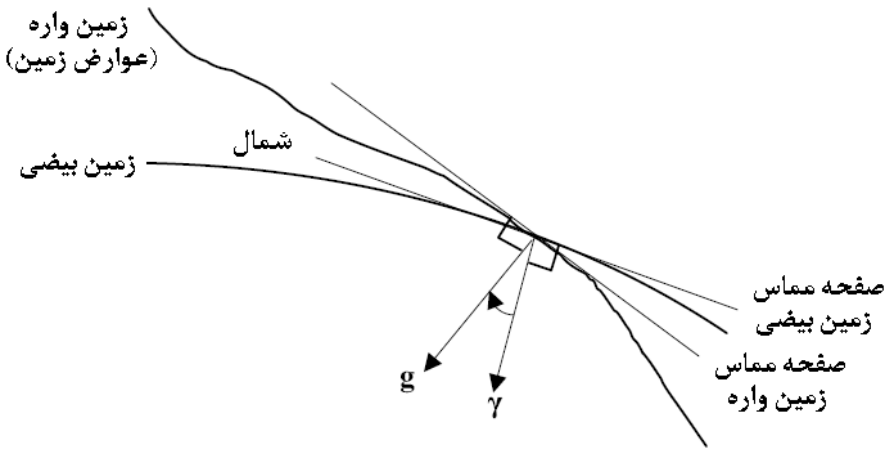
$$\gamma_H = \begin{bmatrix} \gamma_n & 0 & \gamma_d \end{bmatrix}^T \qquad (۱-۱۶)$$

که

$$\gamma_n(\phi) \approx -8.08\times10^{-6} h \ \sin(2\phi) \qquad (۱-۱۷)$$

$$\gamma_d = \gamma\left[1-\frac{2}{a}\left(1+f\ +m-2f\ \sin^2\phi\right)h\right] \qquad (۱-۱۸)$$

معمولا از متغیر γ_n که به ارتفاع بستگی دارد و مقدار بسیار کوچکی دارد صرف نظر می‌شود.



: رابطه بین g و γ در صفحه ND

۱-۳ ناوبری در دستگاه مختصات جغرافیایی

معادله ناوبری در دستگاه جغرافیای محلی (ناوبری) در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\dot{v}_e^n = f^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n)\times v_e^n + g_l^n \qquad (۱-۱۹)$$

که در رابطه بالا v_e^n بیانگر سرعت نسبت به زمین در دستگاه جغرافیای محلی می‌باشد و به صورت سه مولفه سرعت شمالی، شرقی و عمود محلی تعریف می‌شود.

$$v_e^n = [v_N \; v_E \; v_D]^T \qquad (۱-۲۰)$$

از طرفی f^n بیانگر بردار نیروی مخصوص می‌باشد که به صورت سه جزء در دستگاه جغرافیای محلی بیان می‌شود. این بردار حاصلضرب خروجی شتاب‌سنج‌ها (f^b) در ماتریس دوران (C_b^n) است.

$$f^n = [f_N \; f_E \; f_D]^T \qquad (۱-۲۱)$$

برای محاسبه ماتریس دوران (C_b^n) احتیاج به مولفه‌های ω_{nb} در دستگاه بدنی می‌باشد.

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \omega_{nb}^b \qquad (۱-۲۲)$$

از طرفی خروجی ژروسکوپ‌هایی که به بدنه ماهواره‌بر متصل می‌شوند مولفه‌های ω_{ib}^b می‌باشد. در نتیجه برای محاسبه ماتریس ω_{nb}^b باید از رابطه زیر استفاده نمود.

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{in}^b \qquad (۱-۲۳)$$

با جاگذاری رابطه (۲۳-۱) در رابطه (۲۲-۱) داریم

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \left(\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b\right) = C_b^n \omega_{ib}^b - C_b^n \omega_{in}^b \qquad (۱-۲۴)$$

با کمک روابط بین ماتریسی می‌توان معادله (۲۴-۱) بدین صورت بازنویسی نمود. **Error! Reference source not found.**

$$\begin{aligned} & C_b^n \omega_{in}^b = C_b^n C_n^b \omega_{in}^n C_b^n = \omega_{in}^n C_b^n \\ & \Rightarrow \dot{C}_b^n = C_b^n \omega_{ib}^b - \omega_{in}^n C_b^n \end{aligned} \qquad (۱-۲۵)$$

که ω_{in}^n را می‌توان بر حسب مشتق طول و عرض جغرافیایی بصورت رابطه (۲۶-۱) بیان نمود.

$$\omega_{in}^n = \left[\left(\omega_{ie} + \dot{\lambda}\right)\cos\phi \quad -\dot{\phi} \quad -\left(\omega_{ie} + \dot{\lambda}\right)\sin\phi\right]^T \qquad (۱-۲۶)$$

همچنین ω_{ie}^n نرخ چرخش زمین در دستگاه جغرافیای محلی است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\omega_{ie}^n = [(\omega_{ie}\cos\phi) \;\; 0 \;\; (-\omega_{ie}\sin\phi)]^T \qquad (۱-۲۷)$$

رابطه ((۱۹-۱)) دارای ضرب خارجی است. برای تبدیل ضرب خارجی به ضرب داخلی باید نرخ چرخش زمین بصورت یک ماتریس سه در سه نوشته شود که با کمک روش ماتریس پاد متقارن، ω_{ie}^{n} را به صورت زیر باز نویسی می‌نماییم.

$$\omega_{ie}^{n}=\begin{bmatrix}0 & \omega_{ie}\sin\phi & 0\\ -\omega_{ie}\sin\phi & 0 & -\omega_{ie}\cos\phi\\ 0 & \omega_{ie}\cos\phi & 0\end{bmatrix} \qquad (۱-۲۸)$$

متغیر ω_{en}^{n} بیانگر نرخ چرخش دستگاه مختصات جغرافیای محلی نسبت به دستگاه مختصات زمین ثابت است و بعنوان نرخ انتقال[1] شناخته می‌شود. مولفه‌های این رابطه شامل نرخ تغییرات طول جغرافیایی ($\dot{\lambda}$) و عرض جغرافیایی (ϕ) و نرخ تغییرات عرض جغرافیایی ($\dot{\phi}$) می‌باشد. شکل ۵-۱ نشان دهنده طول و عرض جغرافیایی بر روی سطح زمین است.

$$\omega_{en}^{n}=\begin{bmatrix}\dot{\lambda}\cos\phi & -\dot{\phi} & -\dot{\lambda}\sin\phi\end{bmatrix}^{T} \qquad (۱-۲۹)$$

روابط زیر نرخ تغییرات طول و عرض جغرافیایی را بر اساس سرعت نشان می‌دهد.

$$\dot{\lambda}=\frac{v_E}{(R_0+h)\cos\phi}$$
$$\dot{\phi}=\frac{v_N}{(R_0+h)} \qquad (۱-۳۰)$$

با کمک روابط نرخ تغییرات طول و عرض جغرافیایی، رابطه (۲۹-۱) را بازنویسی می‌نماییم.

$$\omega_{en}^{n}=\begin{bmatrix}\frac{v_E}{R_0+h} & -\frac{v_N}{R_0+h} & -\frac{v_E\tan\phi}{R_0+h}\end{bmatrix}^{T} \qquad (۱-۳۱)$$

که R_0 شعاع زمین و h فاصله عمودی از سطح زمین می‌باشد. همچنین این بردار را نیز بصورت یک ماتریس سه در سه باز نویسی می‌نماییم.

[1] Transport Rate

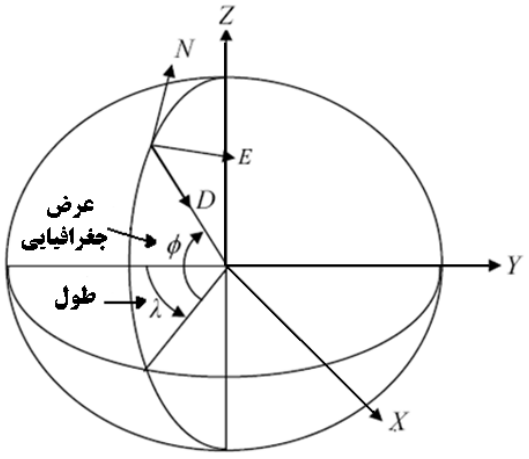
$$\omega_{en}^{n}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{v_E\tan\phi}{R_0+h} & \frac{v_N}{R_0+h} \\ -\frac{v_E\tan\phi}{R_0+h} & 0 & -\frac{v_E}{R_0+h} \\ \frac{v_N}{R_0+h} & \frac{v_E}{R_0+h} & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱-۳۲)$$

از طرفی با داشتن (ω_{en}^{n}) و با استفاده از رابطه (۱-۳۳) ماتریس تبدیل دستگاه مختصات زمینی به دستگاه مختصات ناوبری حاصل می‌شود. با استفاده از این ماتریس تبدیل، نرخ چرخش زمین را در دستگاه مختصات ناوبری بدست می‌آوریم.

$$\dot{C}_n^e = C_n^e\omega_{en}^n \Rightarrow \dot{C}_e^n = -\omega_{en}^n C_e^n \qquad (۱-۳۳)$$

که

$$C_e^n=\begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\lambda\sin\phi & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\lambda\cos\phi & -\cos\lambda\cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} \qquad (۱-۳۴)$$



: طول و عرض جغرافیایی بر روی سطح زمین

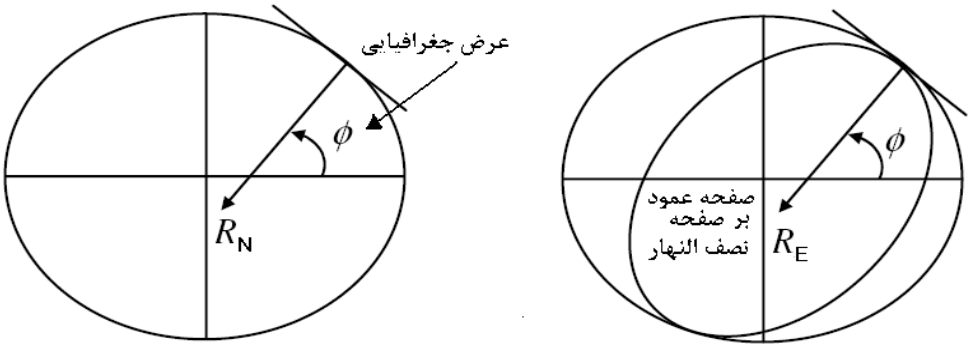
نهایتاً آخرین مولفه در معادله ناوبری در دستگاه مختصات جغرافیایی که g_l^n می‌باشد نمایانگر بردار گرانش محلی است که شامل اثرات جاذبه زمین بر جرم و شتاب جانب مرکز ناشی از چرخش زمین می‌باشد و در قسمت قبل توضیح داده شد.

همانطور که می‌دانیم زمین به شکل یک کره کامل نمی‌باشد بلکه به صورت یک بیضی است که شعاع نصف النهاری[1] آن برابر

$$R_N = \frac{R_0(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1.5}} \qquad (۱-۳۵)$$

و شعاع انحناء در صفحه‌ای عمود بر صفحه نصف النهار (شعاع عرضی[2]) برابر

$$R_E = \frac{R_0}{(1-e^2\sin^2\phi)^{0.5}} \qquad (۱-۳۶)$$



: شعاع انحناء زمین در صفحه نصف النهار (R_N) و عمود بر آن (R_E)

بنابراین با توجه به شکل ۶-۱ و روابط گفته شده برای شعاع انحناء زمین مولفه‌های معادله ناوبری (۱۹-۱) بصورت زیر تعریف می‌شود. این معادلات بطور کامل چگونگی تغییر بردار سرعت جسم نسبت به زمین را در دستگاه مختصات جغرافیایی بیان می‌نماید.

$$\begin{aligned}\dot{v}_N &= f_N - v_E(2\omega_{ie}+\dot{\lambda})\sin\phi + v_D\dot{\phi} \\ &= f_N - 2\omega_{ie}v_E\sin\phi + \frac{v_D v_N}{R_N+h} - \frac{v_E^2\tan\phi}{R_E+h}\end{aligned} \qquad (۱-۳۷)$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_E &= f_E + v_N(2\omega_{ie}+\dot{\lambda})\sin\phi + \dot{v}_D(2\omega_{ie}+\dot{\lambda})\cos\phi \\ &= f_E + 2\omega_{ie}(v_N\sin\phi + v_D\cos\phi) + \frac{v_E}{R_E+h}(v_D + v_N\tan\phi)\end{aligned} \qquad (۱-۳۸)$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_D &= f_D - v_E(2\omega_{ie}+\dot{\lambda})\cos\phi - v_N\dot{\phi} + g \\ &= f_D - 2\omega_{ie}v_E\cos\phi - \frac{v_N^2}{R_N+h} - \frac{v_E^2}{R_E+h} + g\end{aligned} \qquad (۱-۳۹)$$

---

[1] Meridian Radius
[2] Transverse Radius

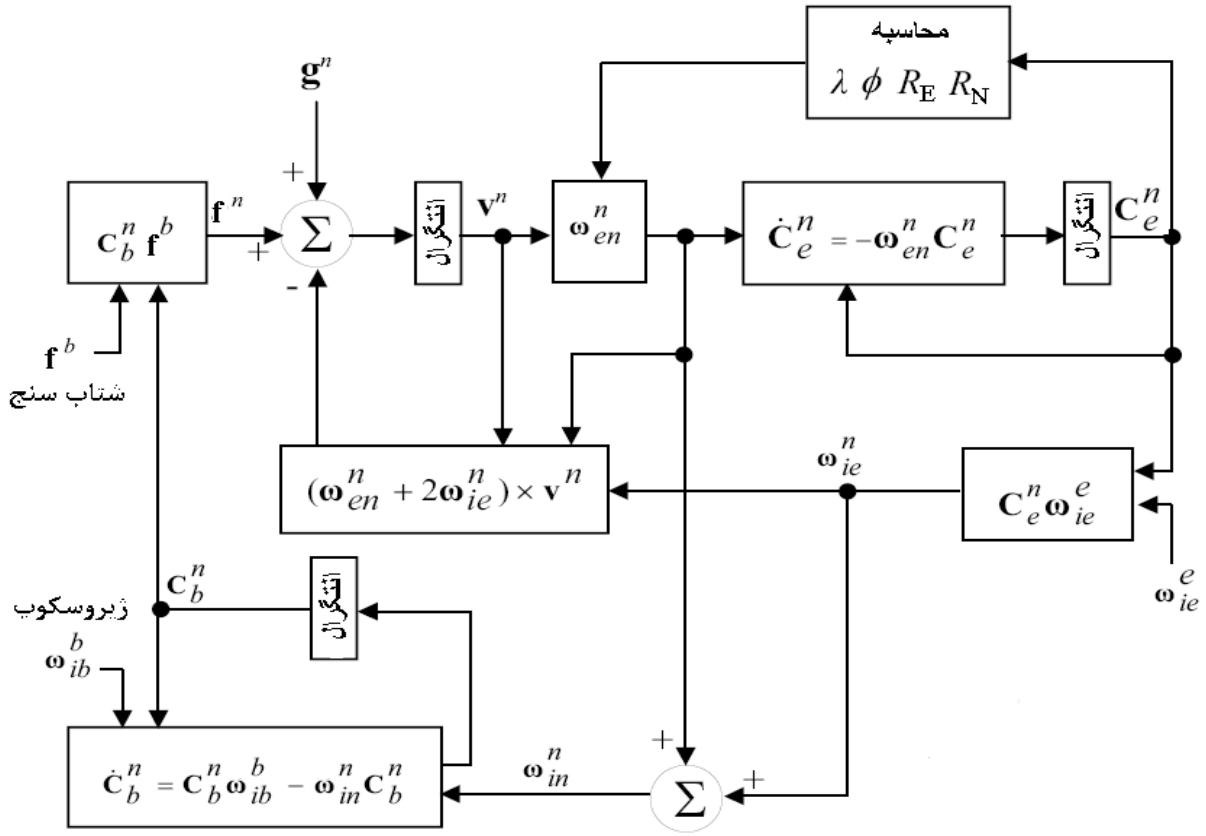
همچنین عرض و طول جغرافیایی و ارتفاع از سطح زمین بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\dot{\phi} = \frac{v_N}{R_N + h} \qquad (۱-۴۰)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E \sec\phi}{R_E + h} \qquad (۱-۴۱)$$

$$\dot{h} = -v_D \qquad (۱-۴۲)$$

شکل ۷-۱ دیاگرام محاسباتی برای معادله ناوبری را نشان می‌دهد. مقادیر ورودی از واحد اندازه‌گیری اینرسی (IMU) به الگوریتم ناوبری، خروجی شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها در دستگاه مختصاتی بدنی می‌باشد. بردار نرخ چرخش زمین (ω_{ie}^{e}) ثابت فرض می‌شود. بردار گرانش ورودی تابعی از طول جغرافیایی و ارتفاع است و بعنوان ورودی به سیستم وارد می‌شود. مقادیر خروجی شامل سرعت در دستگاه مختصات ناوبری به همراه طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع می‌باشد. با استفاده از ماتریس تبدیل C_b^n می‌توان زوایای اویلر را نیز محاسبه نمود.



: دیاگرام سیستم ناوبری اینرسی بدون صفحه پایدار در دستگاه مختصات ناوبری

فصل سوم: تلفیق سیستم‌های ناوبری GPS/INS با اســتفاده از روش فیلتر کالمن

۳-۱ مقدمه

سیستم تعیین موقعیت جهانی GPS و ناوبری اینرســی از متداول‌ترین روش‌های ناوبری در زمان حال می‌باشد. همانطور که در فصل‌های پیشین بیان شد یکی از نقایص مهم سیستم‌های ناوبری اینرسی نامحدود بودن خطای آنها با زمان می‌باشد که باعث شده است معمولا در کنار آنها از سیستم‌های ناوبری کمکی غیر اینرسی استفاده شود. این نامحدود بودن خطا در سیستم‌های ناوبری اینرسی بگونه‌ای است که با گذشت کمتر از چند دقیقه میزان خطا بیش از دو برابر می‌شود و رشد خطا بصورت نمایی[1] است. اما به موازات رشد و بهبود بهبود سیستم‌های ناوبری اینرسی بخصوص در مورد کاهش خطای حسگرهای اینرسی، روش‌های دیگر ناوبری رادیویی نیز پیشرفت چشم‌گیری داشته‌اند. همانطور که در پیوست ب در مورد فراگیر شدن سیستم تعیین موقعیت جهانی که یک سیستم رادیویی ماهواره‌ای است توضیحاتی داده شده است. معمولا در سیستم‌های ناوبری رادیویی بر خلاف سیستم ناوبری اینرسی خطا در طول زمان ناوبری محدود می‌ماند اما مشکل آنها نرخ کم به روز رسانی اندازه‌گیری‌های صورت گرفته است بگونه‌ای که نرخ خروجی گیرنده‌های موجود حداکثر ۱۰ هرتز می‌باشد و این مقدار در مقابل نرخ بروز رسانی سیستم ناوبری اینرسی که بالای ۱۰۰ هرتز است کوچک است. بنابراین استفاده منفرد از سیستم ناوبری تعیین موقعیت جـهانی را در سیستم‌هایی با دینامیک سریع مثل ماهواره‌بر غیر ممکن و نامناسب می‌سازد. افزایش کارایی هر یک از این سیستم‌ها به صورت منفرد هزینه-های بسیار بالایی را می‌طلبد که مقرون بصرفه نیست.

به همین خاطر تلاش در جهت به کارگیری همزمان GPS و INS آغاز گشت که منجر به توسعه الگوریتم‌های تلفیق GPS/INS گردید. الگوریتم تلفیق نتایج بسیار مطلوبی را نسبت به کارایی هر یک از سیستم‌های GPS و INS بصورت منفرد دارد. در جدول ۳-۱ مزایا و معایب هر یک از روش‌های ناوبری ذکر شده، بیان شده است.

---

[1] Exponential

جدول ۱-۲ : مزایا و معایب سیستم‌های ناوبری INS و GPS

سیستم ناوبری	مزیت	معایب
INS	نرخ بالای داده برداری (پهنای باند زیاد) تعیین موقعیت و وضعیت خود اتکایی (عدم وابستگی به داده بیرونی)	محدود نبودن خطا (انباشت خطا در طول زمان) وابستگی به مقدار گرانش افزایش هزینه، وزن و حجم با افزایش دقت
GPS	محدود بودن میزان خطا قیمت ارزان کارایی ساده	نرخ پایین داده برداری تعیین وضعیت با دقت کم مستعد اختلالات بیرونی[1] (نویز)

معمولا برای تلفیق داده‌های خروجی هر یک از سیستم‌های ناوبری ذکر شده از روش فیلتر کالمن استفاده می‌شود که در ادامه چگونگی عملکرد فیلتر کالمن[2] بهمراه انواع آن توضیح داده می‌شود. البته در اینجا توضیح مختصری در مورد فیلتر کالمن و عملکرد آن داده می‌شود. چرا که بدلیل فراگیر بودن این روش، منابع و کتب بسیاری در این رابطه به تفصیل پرداخته‌اند. همچنین بدلیل نیاز فیلتر کالمن به معادلات دینامیک خطای سیستم ناوبری اینرسی، توضیحات و معادلات مربوطه در ادامه بیان می‌شود. نهایتاً انواع روش‌های تلفیق موجود بیان شده و یک روش بعنوان روش مورد استفاده در این پایان‌نامه انتخاب می‌شود.

۲-۲ فیلتر کالمن

فیلتر کالمن یک روش موثر و بسیار فراگیر برای ترکیب اغتشاشات خروجی حسگر بمنظور حدس زدن وضعیت یک سیستم که دارای دینامیک مشخصی نیست می‌باشد. بعبارت دیگر یکی از روش‌های معروف و قابل استفاده جهت تخمین داده‌های تصادفی برای اندازه‌گیری حسگرهای دارای اغتشاش، استفاده از روش فیلتر کالمن است. بنابراین می‌توان دریافت که مقادیر اندازه‌گیری شده توسط حسگرهای ناوبری کاملا خالص

[1] Jamming
[2] Kalman Filter

و برابر با مقـدار واقعی متغیر مورد نظر نمی‌باشد بلکه همـراه با یک سری اغتشاشات، اندازه‌گیری صـورت می-گیرد. در ادامه چند اصطلاح را تعریف می‌نمائیم.**Error! Reference source not found.**

اغتشاش حسگرها: این اغتشاشات (نویز) در یک سیستم ناوبـری تلفیقی می‌تواند ناشـی از دریافت کننده-های GPS و یا ناشی از حسگرهای سیستم ناوبری اینرسی (شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها) باشد. البته می‌تواند شامل زیر سیستم‌ها نیز مثل ساعت GPS (که در ماهواره قرار دارد) و یا ناشی از حسگرهای کمکی دیگری مانند حسگر سرعت سنج و ... نیز باشد.

حالت سیستم[1]: متغیرهای حالت سیستم در یک سیستم ناوبری می‌تواند شامل موقعیت، سرعت، شتاب، وضعیت، نرخ تغییرات وضعیت و ... وسیله باشد. البته ممکن است حالت سیستم شامل متغیرهای غیر اصلی (متغیرهای اغتشاشی) که برای مدل سازی تاخیر ناشی از عبور سیگنال از لایه‌های جو یا پارامترهای متغیر با زمان حسگرها مثل ساعت گیرنده GPS یا ضریب مقیاس و بایاس خروجی شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها هم باشد که باعث پیچیدگی و افزایش عملیات محاسباتی می‌شود.

دینامیک نامعلوم: شامل اغتشاشات غیر قابل پیش‌بینی وارد بر وسیله که ناشی از کاربر انسانی یا عوامل غیر انسانی مثل باد، جریان‌های سطحی و یا حتی تغییرات غیر قابل پیش‌بینی در متغیرهای حسگر باشد.

متغیرهای فیلتر کالمن

معادلات فیلتر کالمن از دو نوع متغیر تشکیل شده است. این دو نوع متغیر عبارتند از

۱- متغیر حدسی ($\hat{x}$) از بردار حالت واقعی سیستم (X). که اجزا بردار حالت حدسی (تخمین) شامل متغیرهای زیر است.

الف) متغیر بهره: متغیری که نیاز به دانستن آن داریم مثل موقعیت، سرعت و ...

[1]System State

ب) متغیر اغتشاشی[1]: این متغیرها به صورت ذاتی مورد استفاده نیستند اما در فرآیند گمانه‌زنی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مثال، خطای تاخیر انتشار سیگنال GPS (ناشی از جو)، که هدف دانستن این متغیر نیست اما مجبور به محاسبه و تعیین آن هستیم تا بتوانیم موقعیت دریافت کننده را حدس بزنیم.

در سیستم ناوبری تلفیقی INS/GPS متغیرهای وضعیت فیلتر کالمن شامل همه متغیرهای دینامیکی سیستم که قابل اندازه‌گیری توسط حسگرها هستند می‌باشد. برای مثال متغیرهای وضعیت فیلتر کالمن برای سیستم INS که متشکل از شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌های نرخی است شامل شتاب و نرخ چرخشی، که حسگرها مربوطه تعیین می‌نمایند می‌باشد. همچنین متغیرهای وضعیت فیلتر کالمن برای سیستم ناوبری GPS شامل شبه فاصله‌ها که فاصله مابین ماهواره‌ها و آنتن دریافت کننده می‌باشد که در نتیجه تعیین کننده مختصات موقعیت آنتن دریافت کننده GPS است می‌باشد. این موقعیت می‌تواند بصورت طول، عرض و ارتفاع جغرافیایی نسبت به زمین بیضی یا نسبت به زمین کروی یا بصورت مختصات کارتزین در دستگاه ECEF یا ECI و ... باشد.

۲- متغیر حدسی از حدس نامطمئن: خطای تخمین، بوسیله ماتریس کواریانس[2] خطای تخمین، که بصورت $(\hat{x}-x)$ نشان داده شده مدل می‌شود.

$$P = E\left[(\hat{x}-x)(\hat{x}-x)^T\right] \qquad (۲-۱)$$

که متغیر $\hat{x}$ بردار حالت حدس زده شده از بردار حالت واقعی (x) است و E عملگر امید ریاضی[3] می‌باشد. این معادله برای مدل ماتریس کواریانس و بکارگیری خطای تخمین می‌باشد. (در حالت کلی به عنوان معادله ریکارتی[4] خوانده می‌شود) بنابراین برای محاسبه نویز حسگر و دینامیک خطای تخمین برای حالت حدس سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

---

[1] Nuisance Variables
[2] Covariance Matrix
[3] Expectancy Operator
[4] Riccati Equation

در اینجا لازم است دو اصطلاح امید ریاضی و کواریانس بصورت مختصر تعریف شوند:

امید ریاضی: بعنوان ارزش مورد انتظار یک متغیر تصادفی گسسته که برابر با مجموع حاصلضرب احتمال وقوع هر یک از حالات ممکن در مقدار آن می‌باشد. در نتیجه میانگین برابر است با مقداری که بطور متوسط از یک فرآیند تصادفی با بینهایت تکرار حاصل می‌شود. مقدار احتمال وقوع از صفر تا یک می‌تواند متغیر باشد.

$$E\left(x\right)=\sum F\left(x\right)X\ \left(x\right)=\mu=\int_{a}^{b}x\ F\left(x\right)dx \qquad (۲-۲)$$

که $F\left(x\right)$ تابع توزیع احتمال است.

کواریانس: اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی است که اگر دو متغیر تصادفی یکسان باشند کواریانس برابر واریانس[۱] (معیاری برای سنجش میزان پراکندگی داده‌ها از میانگین و برابر مربع انحراف معیار است) می‌شود.

$$COV\ \left(x,y\right)=E\left[\left(x-E\left(x\right)\right)\left(y-E\left(y\right)\right)^{T}\right] \qquad (۲-۳)$$

بروز رسانی پیش بینی[۲] و بروز رسانی تصحیح[۳]

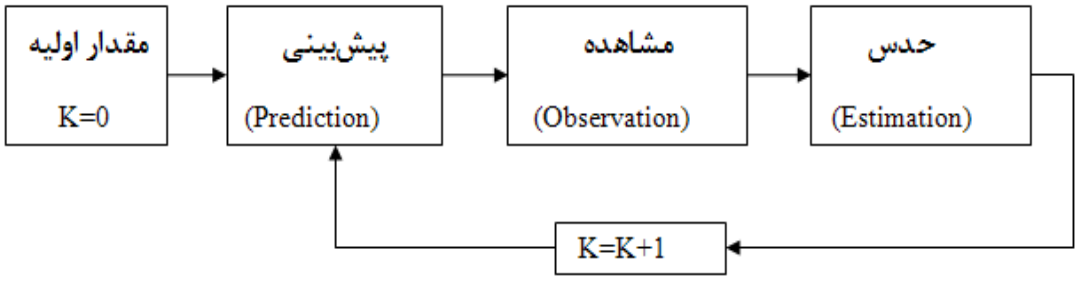
فیلتر کالمن متشکل از دو مرحله بروز رسانی پیش‌بینی متغیر و تصحیح متغیر است.

مرحله تصحیح موجب بروز رسانی بردار حالت حدسی و خطای تخمین (کواریانس) و بهره کالمن[۴] می‌شود که بر پایه اطلاعات جدیدی که از حسگرها بدست می‌آید و مقادیر حدس زده شده برای آن زمان تعیین می‌شود. البته بعنوان بروز رسانی مبتنی بر مشاهده[۵] یا بروز رسانی اندازه‌گیری شده نیز شناخته می‌شود.

---

[1] Variance
[2] Prediction Updates
[3] Correction Updates
[4] Kalman Gain
[5] Observational Update

مرحله پیش‌بینی موجب بروز رسانی بردار حالت حدسی و خطای تخمین (کواریانس) با استفاده از دینامیک سیستم برای زمان بعد می‌شود. البته بعنوان بروز رسانی موقتی[1] نیز خوانده می‌شود.



: روند فیلتر کالمن

بهره کالمن

ماتریس بهره کالمن ($\bar{K}$) به عنوان کلید طلائی فیلتر کالمن می‌باشد. بهره کالمن در تعیین تصحیح متغیر حالت و تصحیح کواریانس خطای تخمین استفاده می‌شود و وجود یک بهره بهینه موجب نتیجه بهتر و دقیق‌تری از حدس حالت سیستم می‌شود. بعبارت دیگر بهره کالمن یک ماتریس وزنی بهینه است که برای ترکیب اطلاعات جدید حسگر با حدس قبلی بمنظور تعیین یک حدس جدید می‌باشد. معادله (۱۰-۲) تعیین کننده مقدار بهره کالمن در حلقه فیلتر کالمن است.

بردار اندازه گیری

مجموعه متغیرهای خروجی از حسگرها که بصورت مجموعه برداری زیر تعریف می‌شوند و بعنوان بردار اندازه‌گیری خوانده می‌شود که درحقیقت یک بردار ستونی با m سطر می‌باشد.

[1] Temporal Update

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \qquad (۲-۴)$$

که در اینجا بردار اندازه‌گیری برابر است با

$$z = P_{GPS} - P_{INS} \qquad (۲-۵)$$

و P موقعیت می‌باشد.

ماتریس حساسیت اندازه گیری

فرض بر این است که مقادیر z_i بصورت خطی وابسته به بردار ناشناخته x که بدنبال حدس زدن آن هستیم می‌باشد.

$$z = Hx \qquad (۲-۶)$$

که H ماتریس حساسیت اندازه‌گیری است و در اینجا برابر است با **Error! Reference source not found.**

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲-۷)$$

۲-۳ معادلات مورد استفاده در فیلتر کالمن

همانطور که پیشتر گفته شد مجموع معادلات مورد استفاده در روش فیلتر کالمن به دو دسته کلی معادلات پیش‌بینی کننده و معادلات تصحیح کننده تقسیم می‌شود. این معادلات بصورت حلقه بسته با هم در ارتباط می‌باشند. شکل ۲-۲ نحوه فرآیند فیلتر کالمن را در یک حلقه نشان می‌دهد. همانطور که در حلقه فیلتر کالمن مشاهده می‌شود، دارای دو سری معادله تخمین زننده و معادله پیش‌بینی کننده می‌باشد.

۱- بردار وضعیت پیش‌بینی شده

$$\hat{x}_k(-) = \Phi_k \hat{x}_{k-1}(+) \quad (۲-۸)$$

۲- ماتریس کواریانس پیش‌بینی شده

$$P_k(-) = \Phi_k P_{k-1}(+)\Phi_k^T + Q_{k-1} \quad (۲-۹)$$

۳- تصحیح کننده بهره کالمن

$$\bar{K}_k = P_k(-)H_k^T(H_k P_k(-)H_k^T + R_k)^{-1} \quad (۲-۱۰)$$

۴- وضعیت حدسی تصحیح شده

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + \bar{K}_k(z_k - H_k\hat{x}_k(-)) \quad (۲-۱۱)$$

۵- ماتریس کواریانس تصحیح شده

$$P_k(+) = P_k(-) - \bar{K}_k H_k P_k(-) \quad (۲-۱۲)$$

حال متغیرهای مورد استفاده در معادلات فوق را تعریف می‌نماییم:

Φ_k: ماتریس انتقال حالت[۱]

H: ماتریس حساسیت اندازه‌گیری یا ماتریس مشاهده‌پذیری[۲]

$H\hat{x}_k(-)$: مقادیر پیش‌بینی شده

$z - H\hat{x}_k(-)$: تفاضل بین بردار اندازه‌گیری و مقدار پیش‌بینی شده که حاصل یک بردار جدید است.

$\bar{K}$: بهره کالمن

$P_k(-)$: مقدار پیش‌بینی شده یا مقدار قبلی کواریانس تخمین

$P_k(+)$: مقدار تصحیح شده یا مقدار قیاسی کواریانس تخمین

Q_k: کواریانس اغتشاشات ورودی[۱]

---

[1] State Transition Matrix

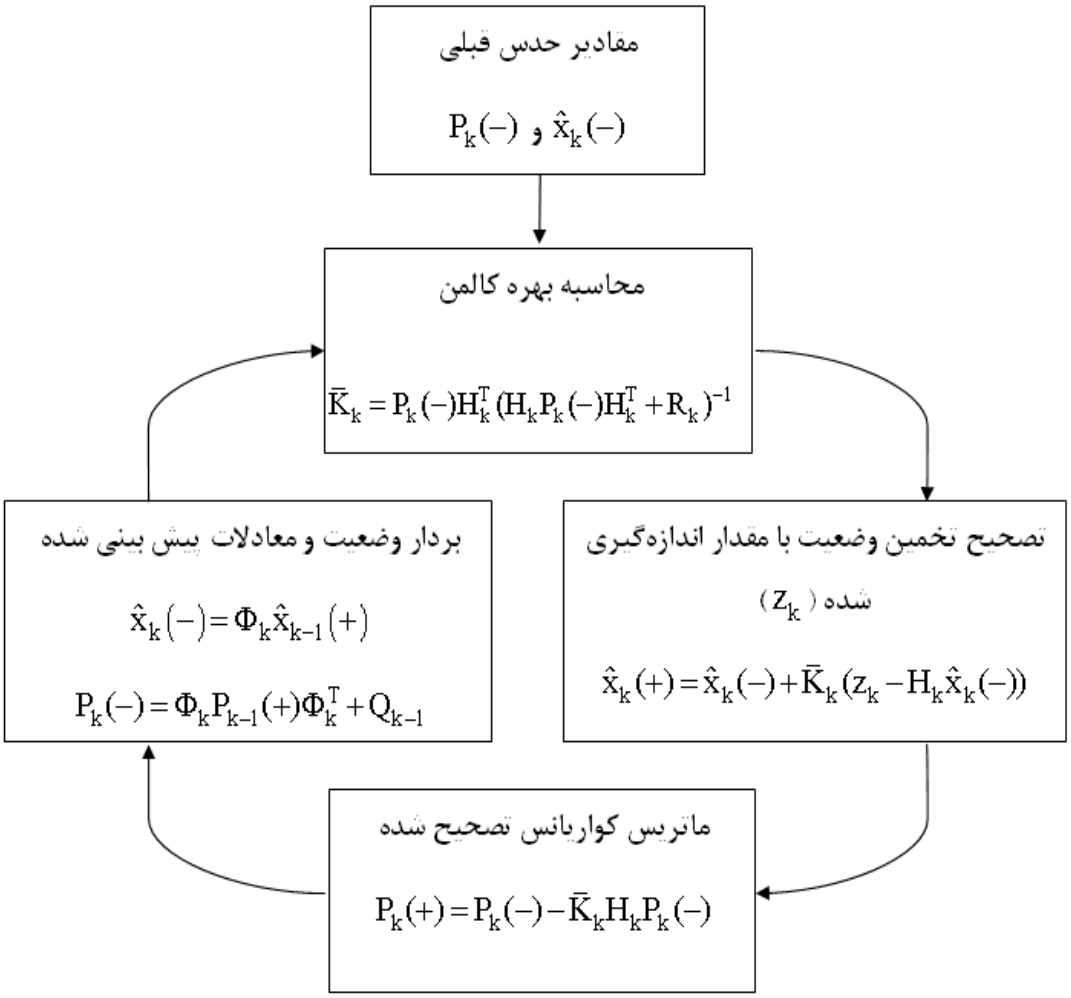
2 Observation Matrix

R: کواریانس نویز اندازه‌گیری[۲]

$\hat{x}_k(-)$: مقدار پیش‌بینی شده از بردار تخمین وضعیت (حالت)

$\hat{x}_k(+)$: مقدار تصحیح شده از بردار تخمین وضعیت

z: بردار اندازه‌گیری یا بردار مشاهده شده

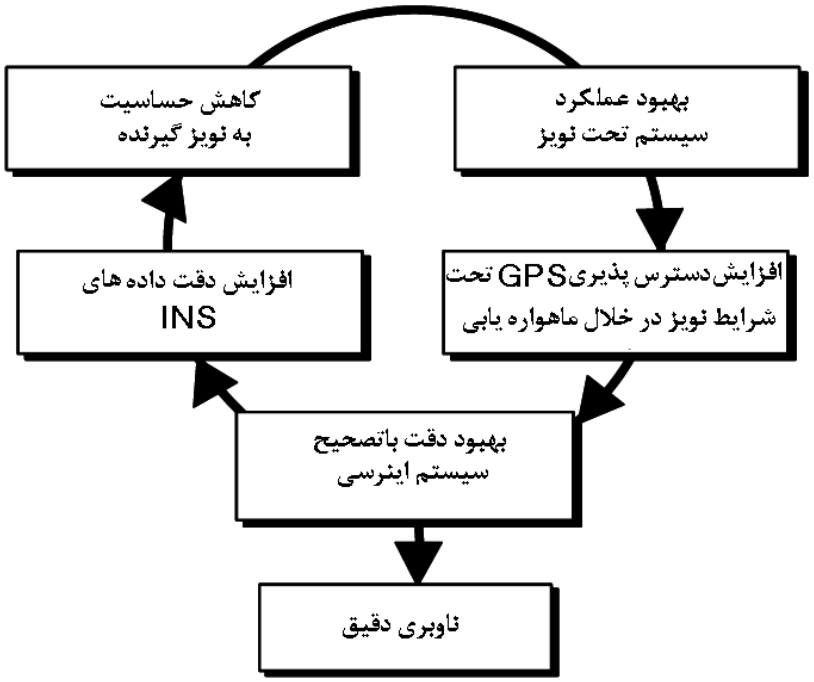


: حلقه فیلتر کالمن

[1]Covariance of Disturbance Noise
[2]Covariance of Measurement Uncertainty

۲-۱ روش‌های تلفیق GPS/INS

همانطور که بیان شد با ترکیب داده‌های خروجی سیستم‌های ناوبری INS و GPS می‌توان از مزایا و برتری هر سیستم در جهت جبران عیب سیستم دیگر بمنظور افزایش دقت ناوبری استفاده نمود. در نتیجه حتی در بدترین شرایط ناوبری نیز سیستم تلفیقی دارای دقتی کمتر از دقت سیستم ناوبری اینرسی نخواهد بود. بنابراین سیستم ناوبری تلفیقی سیستمی است که علاوه بر داشتن خاصیت سیستم‌های ناوبری اینرسی که همانا خروجی بلادرنگ و پیوسته، بهمراه داده برداری خیلی سریع، دارای خطای محدود در طول زمان ناوبری بهمراه کاهش میزان خطای ناشی از مدل سازی شتاب جاذبه گرانشی و محاسبات صورت گرفته در رایانه ناوبری می‌باشد. در شکل ۳-۲ افزایش دقت سیستم ناوبری را بر اثر هم‌افزایی سیستم‌های INS و GPS نشان می‌دهد.**Error! Reference source not found.**



: هم افزایی سیستم INS/GPS

یکی از مزایای مهم در تلفیق توام سیستم‌های ناوبری اینرسی و تعیین موقعیت جهانی، تنظیم حسگرهای اینرسی است که بر اثر اغتشاشات دچار خطا در اندازه‌گیری شده‌اند و با کمک اندازه‌گیری حسگر GPS می-

توان آنها را در طول ماموریت باز تنظیم[1] نمود.

ساختارهای موجود جهت تلفیق سیستم ناوبری اینرسی با سیستم ناوبری تعیین موقعیت جهانی شامل چهار دسته کلی زیر است:**Error! Reference source not found.**

۱- تلفیق ساده[2] (سیستم‌های مجزا)

۲- تلفیق توام ضعیف[3] (متوالی)

۳- تلفیق توام کامل[4]

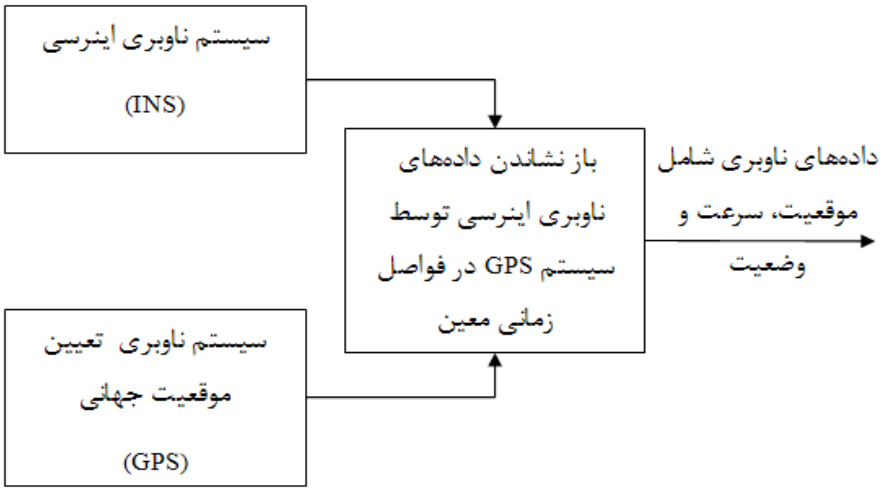
۴- تلفیق توام فوق کامل[5] (انتگرال‌گیری عمیق)

در تلفیق ساده هر دو سیستم بصورت مستقل محاسبات ناوبری مربوط به خود را انجام داده و یک الگوریتم ساده تلفیق بر روی اطلاعات خروجی آنها عمل می‌نماید. بعبارت دیگر موقعیت توسط سیستم ناوبری GPS تعیین شده و در فواصل زمانی مشخصی به عنوان مقدار اولیه برای سیستم ناوبری اینرسی در نظر گرفته می‌شود. این روش ساده‌ترین و ارزان‌ترین و سریع‌ترین راه جهت تلفیق دو سیستم مذکور است و نیاز به رایانه ناوبری با حافظه کمی دارد. در این روش هیچ نوع داده‌ای بصورت پسخور[6] وجود ندارد و در نتیجه خرابی هر یک از دو سیستم ناوبری بر روی دیگری اثر ندارد. البته این روش در کمترین سطح بهینگی از لحاظ دقت نسبت به روش‌های تلفیقی دیگر قرار دارد.

در ساختار تلفیق توام نیز هر دو سیستم بصورت مستقل محاسبات ناوبری مربوط به خود را انجام می‌دهند ولی در این ساختار هر کدام از آنها اطلاعاتی بصورت پسخور از نتایج عملکرد الگوریتم تلفیق دریافت می‌نمایند. این اطلاعات برای ردیابی سیگنال ماهواره‌ها توسط گیرنده GPS و تصحیح خطای ذاتی هر یک از دو سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بسته به اینکه خروجی فیلتر کالمن برای بهبود سیستم ناوبری به گیرنده GPS پسخور شود یا نه، سیستم به دو نوع تلفیق ضعیف یا کامل تقسیم می‌شود.

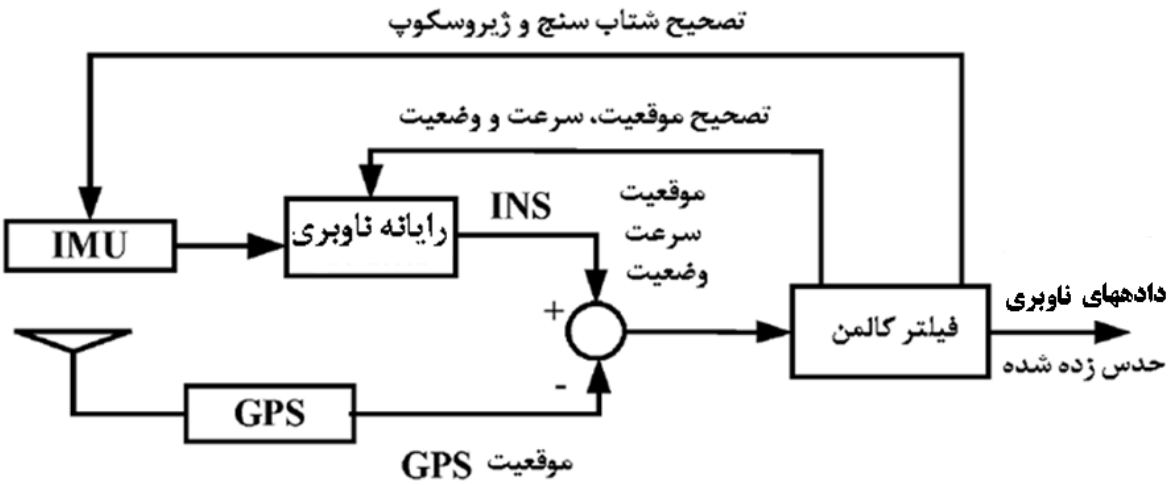
---

[1]Calibrate
[2]Uncoupled Systems
[3]Loosely Coupled (Cascade)
[4]Tightly Coupled
[5]Ultra-Tightly Coupled (Deeply Integrated)
[6] Feedback



: تلفیق ساده

در روش تلفیق توام ضعیف اندازه‌گیری‌های صورت گرفته توسط گیرنده GPS بطور مستقل پردازش شده و پس از آن بهمراه داده‌های ناشی از ناوبری اینرسی به فیلتر کالمن وارد می‌شود. در فیلتر کالمن با پردازش اندازه‌گیری‌های هر دو سیستم ناوبری میزان خطای موجود در سیستم ناوبری اینرسی را تخمین می‌زند. آنگاه با تفاضل این مقادیر از خروجی ناوبری اینرسی، مقادیر جدید را جایگزین خروجی ناوبری اینرسی می‌نماید. بعبارت دیگر در این روش، فیلتر کالمن مقادیر خطای سیستم ناوبری اینرسی را محاسبه می‌نماید.

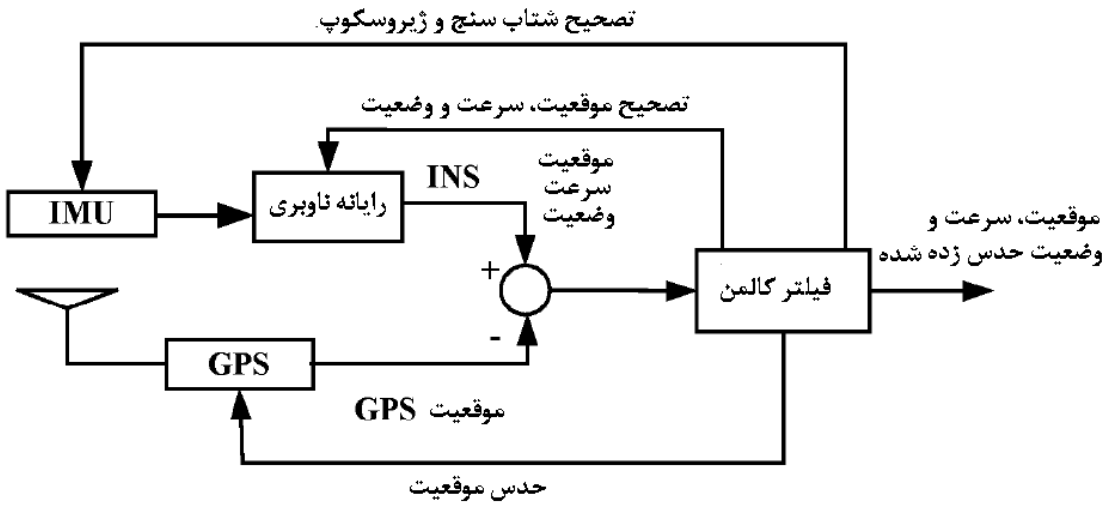


: تلفیق توام ضعیف

در روش تلفیق کامل از سیستم ناوبری اینرسی به عنوان مسیر مرجع استفاده می‌شود. برای این منظور

هنگامی که سیستم GPS دارای خروجی است مقدار فاصله بین ماهواره و گیرنده بر اساس خروجی سیستم ناوبری اینرسی محاسبه می‌شود و از تفاضل این دو به عنوان اندازه‌گیری‌های فیلتر تلفیق استفاده می‌شود.

روش تلفیق توام فوق کامل، که روشی در حال توسعه و تحقیق می‌باشد. این روش از لحاظ اصول کاری به روش تلفیق توام کامل نزدیک است. هرچند که ادعا شده که این روش از دقت بهتری نسبت به روش‌های قبلی برخوردار است اما دارای حجم سنگین محاسبات می‌باشد.



: تلفیق توام کامل

همانطور که در بخش قبل بیان شد (معادلات خطای INS)، برای توصیف رفتار خطای سیستم ناوبری اینرسی نیازمند نه عدد متغیر هستیم که شامل سه عدد متغیر موقعیت، سه عدد متغیر سرعت و سه عدد متغیر وضعیت است. بعبارت دیگر برای شبیه‌سازی رفتار سیستم خطای ناوبری اینرسی در تلفیق ضعیف نیازمند نه عدد متغیر هستیم. اما در روش تلفیق کامل علاوه بر این متغیرها نیازمند معادلات توصیف کننده رفتار بایاس ساعت گیرنده و بایاس شتاب‌سنج و ژیروسکوپ نیز هستیم. به همین دلیل معادلات سیستم تلفیق کامل از تعداد متغیرهای بیشتری تشکیل شده که باعث افزایش پیچیدگی‌های محاسباتی می‌شود هرچند که دارای دقت کمی بهتر نسبت به سیستم مشابه در حالت تلفیق ضعیف است. در جدول ۲-۲ مزایا و معایب چهار روش تلفیق بیان شده نشان داده شده است.

اما تفاوتی که بین تلفیق توام ضعیف و کامل وجود دارد در نوع داده‌های خروجی از گیرنده GPS است.

داده‌های خروجی گیرنده GPS در تلفیق توام کامل شامل شبه فاصله و نرخ تغییرات شبه فاصله می‌باشد و خـطای وضعیت GPS نیز توسط یک فیلتر کالمـن حدس زده می‌شود. اما در سیستم تلفیق توام ضعیف داده‌های خروجی گیرنده GPS شامل موقعیت و یا سرعت است که این داده‌ها از اطلاعات خام (شبه‌فاصله‌ها) حاصل می‌شود.

جدول ۲-۲ : مزایا و معایب روش‌های تلفیق GPS/INS

سطح تلفیق	مزیت	عیب
تلفیق ساده (مجزا)	عدم وابستگی دو سیستم ناوبری بهم عدم محاسبات زیاد	پائین‌ترین سطح بهینگی تلفیق نامناسب برای سیستم‌هایی با دینامیک سریع
تلفیق توام ضعیف	انعطاف پذیری بیشتر نسبت به نویز تخمین بهتر موقعیت فیلتر کالمن کوچکتر تنظیم (کالیبراسیون) وسایل اندازه گیری در طول پرواز عملکرد محاسباتی سریعتر مناسب برای محاسبات موازی	نیازمندی به حداقل چهار ماهواره جهت تعیین موقعیت توسط GPS
تلفیق توام کامل	درجه بهینگی بالا نیازمندی به کمتر از چهار ماهواره برای تعیین موقعیت توسط GPS ورود داده‌های اینرسی به طور مستقیم به سیستم GPS تخمین بهتر	زیاد بودن تعداد معادلات فضای حالت خطا پیچیدگی زیاد محاسبات هزینه زیاد
تلفیق توام فوق کامل	عدم وقفه در تعیین موقعیت بر اثر نویز نیازمندی به کمتر از چهار ماهواره برای تعیین موقعیت توسط GPS افزایش دقت	هزینه زیاد بار شدید محاسباتی نیاز به بروز رسانی سریعتر (بیش از ۱۰۰ هرتز تا یک کیلو هرتز)